

Problème 400 – Les Stands de Jojo's Bizarre Adventure

Niveau : Terminale (Option Maths Expertes)

Chapitres : Nombres complexes

Inédit, publié le 13/08/2023



« Jojo's Bizarre Adventure » raconte depuis 1986 plusieurs générations de la famille Joestar. Par son style très particulier, ce manga attire autant de fans que de détracteurs mais parvient toutefois à être un des mangas les plus vendus dans le monde. Avec 9 parties à ce jour, c'est à partir de la 3^{ème} partie, « Stardust Crusaders », qu'on a vu apparaître l'idée des « Stands », ces personnifications des pouvoirs spéciaux que détiennent les personnages surhumains du manga.

Ces Stands ont été classés selon 6 paramètres (même s'ils ont en plus des pouvoirs spéciaux) : Force, Vitesse, Portée, Durabilité, Précision et Potentiel. Chaque Stand a une évaluation pour chacun des paramètres qui, dans l'ordre croissant, est : « \emptyset » (nul), E, D, C, B, A et ∞ . Pour représenter un Stand, on utilise fréquemment un diagramme en toile d'araignée (ou diagramme de Kiviat) – comme on peut le voir en **Annexe**. On imagine pour ce problème que ce diagramme est à l'intérieur d'un cercle trigonométrique centré sur un repère complexe (O, \vec{i}, \vec{j}) , et que les 6 paramètres se répartissent le long de 6 demi-axes, avec pour origine O. Les demi-axes coupent le cercle trigonométrique en 6 parts égales (on pourra ainsi admettre que deux demi-axes consécutifs font un angle au centre égal à $\frac{\pi}{3}$). Le premier des demi-axes, « Force », se confond avec l'axe des ordonnées.

La position de l'évaluation sur un axe va de « \emptyset », correspondant à une position au point O, jusqu'à « ∞ », correspondant à une position sur le cercle trigonométrique (distance 1 à l'origine). Un demi-axe est découpé de manière régulière en six pour positionner les 5 lettres E, D, C, B et A. En reliant les 6 évaluations d'un Stand sur ce diagramme, on obtient un hexagone : en **Annexe**, on a ainsi tracé l'hexagone rouge correspondant au Stand « Beach Boy ».

1) a) Donner sans justifier sous une forme exponentielle, dans le plan complexe, l'affixe des sommets de l'hexagone rouge dessiné en **Annexe**.

b) Écrire les affixes trouvées en 1.a) avec une forme algébrique.

2) a) Tracer en bleu, sur le même diagramme en **Annexe**, l'hexagone correspondant au Stand « Silver Chariot » et dont les sommets, dans le désordre, sont révélés par les indices suivants :

Sommet 1 : Évaluation = C.

Sommet 2 : $\frac{2}{3} (\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2})$.

Sommet 3 : $\frac{5\sqrt{3}}{12} + \frac{5}{12}i$.

Sommet 4 : $\frac{1}{2}i$.

Sommet 5 : Module : $\frac{2}{3}$; Argument : $\frac{7\pi}{6}$.

Sommet 6 : $\frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6})$.

b) Écrire les affixes des sommets de l'hexagone bleu sous une forme exponentielle.

3) A l'aide des écritures exponentielles, prouver que l'hexagone bleu peut être obtenu à partir d'une rotation de l'hexagone rouge. En préciser le centre et l'angle.

4) On rappelle une formule générale de l'aire d'un triangle :

$$A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \hat{c}$$

où a et b sont les longueurs de deux côtés quelconques d'un triangle et \hat{c} l'angle formé par ces deux côtés.

On appelle de manière générale $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ les affixes de 6 sommets consécutifs d'un hexagone.

a) Démontrer que l'aire d'un hexagone intérieur au cercle trigonométrique, et dont les sommets sont situés sur les 6 demi-axes, a pour formule générale :

$$A_{\text{hexagone}} = \frac{\sqrt{3}}{4} (|z_1 z_2| + |z_2 z_3| + |z_3 z_4| + |z_4 z_5| + |z_5 z_6| + |z_6 z_1|)$$

b) Calculer l'aire théorique maximale d'un hexagone représentant un Stand.

c) Calculer l'aire de l'hexagone rouge (arrondir au centième près, en unité).

5) Un Stand qui aurait globalement les mêmes évaluations que celles représentées par l'hexagone rouge, mais réparties sur des paramètres différents, est-il forcément représenté par un hexagone de même aire que l'hexagone rouge? Justifier la réponse.

Annexe

Représentation des paramètres des Stands
(en rouge : hexagone représentant le Stand « Beach Boy »)

